

TEMA 6 - RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

ECUACIONES DE LA RECTA

Para hallar la ecuación de una recta en el espacio necesito:

- Dos puntos
- Un punto y su vector director

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\vec{v} = (a, b, c)$.

Si me dan dos puntos $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow$ Tomaremos uno de los mismos $A(x_0, y_0, z_0)$ y como

vector $\vec{v} = \vec{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k \cdot (a, b, c) \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = x_0 + ka \\ y = y_0 + kb \\ z = z_0 + kc \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

Ecuación implícita (como intersección de dos planos):
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ECUACIONES DE UN PLANO

Para hallar la ecuación de un plano en el espacio necesito:

- Tres puntos
- Un punto y dos vectores directores

Nota: Nosotros utilizaremos siempre un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

Si me dan tres puntos $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow$ Tomaremos uno de los mismos $A(x_0, y_0, z_0)$

y como vectores $\vec{v}_1 = \vec{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$\vec{v}_2 = \vec{AC} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s \cdot (a_1, b_1, c_1) + t \cdot (a_2, b_2, c_2) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = x_0 + s \cdot a_1 + t \cdot a_2 \\ y = y_0 + s \cdot b_1 + t \cdot b_2 \\ z = z_0 + s \cdot c_1 + t \cdot c_2 \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Ecuación implícita o general: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

Vector normal $= \vec{n} = (A, B, C) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ (Es perpendicular a los dos vectores directores)

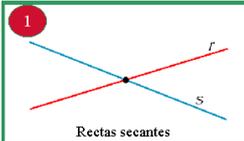
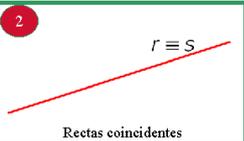
Nota: Si conocemos el vector normal y un punto podemos hallar directamente la ecuación general del plano. Del vector normal conocemos A, B y C ; y si sustituimos el punto hallamos D.

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

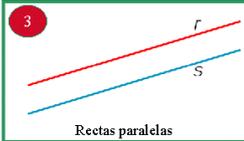
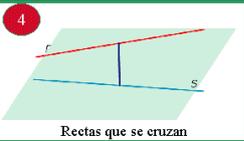
Posiciones relativas de dos rectas (I)

Sea r dada como intersección de los planos $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ y $b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$. Sea la recta s dada como intersección de $c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$ y $d_1x + d_2y + d_3z + d_4 = 0$. Estudiar las posiciones relativas de ambas rectas equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman las cuatro ecuaciones anteriores. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

	
Rectas secantes	Rectas coincidentes
Las dos rectas tienen un punto en común	Las rectas tienen todos sus puntos comunes
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad
$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 3$	$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2$

Posiciones relativas de dos rectas (II)

Sea r dada como intersección de los planos $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$ y $b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$. Sea la recta s dada como intersección de $c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$ y $d_1x + d_2y + d_3z + d_4 = 0$. Estudiar las posiciones relativas de ambas rectas equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman las cuatro ecuaciones anteriores. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

	
Rectas paralelas	Rectas que se cruzan
Las rectas no tienen puntos en común	Las rectas no tienen puntos en común
Sistema incompatible	Sistema incompatible
$\text{rango}(A) = 2; \text{rango}(B) = 3$	$\text{rango}(A) = 3; \text{rango}(B) = 4$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Matemáticas 2º Bachillerato Vectores en el espacio. Planos y rectas. Propiedades métricas. sm

Posiciones relativas: dos planos

Sean $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y $\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Estudiar las posiciones relativas de ambos planos equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman sus ecuaciones. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

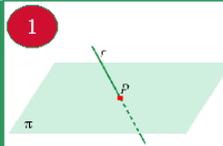
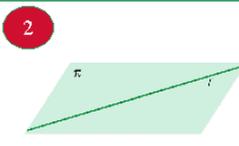
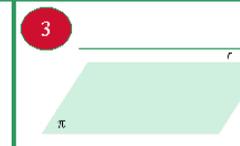
		
Planos secantes Tienen una recta común	Planos paralelos No tienen puntos comunes	Planos coincidentes Son el mismo plano
Sistema compatible indeterminado de rango 2	Sistema incompatible	Sistema compatible indeterminado de rango 1
$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2$	$\text{rango}(A) = 1; \text{rango}(B) = 2$	$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 1$
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$

POSICIÓN RELATIVA ENTRE RECTA Y PLANO

6 Rectas y planos en el espacio 22 Euler - Matemáticas II sm

Posiciones relativas de una recta y un plano

Sean $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y la recta r dada como intersección de $\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ y $\pi'': a''x + b''y + c''z + d'' = 0$. Estudiar las posiciones relativas de recta y plano equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman las tres ecuaciones anteriores. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

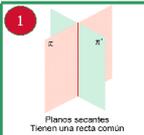
 <p>1</p> <p>Recta y plano secantes</p>	 <p>2</p> <p>Recta contenida en el plano</p>	 <p>3</p> <p>Recta y plano paralelos</p>
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad	Sistema incompatible
$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 3$	$\text{rango}(A) = 2; \text{rango}(B) = 2$	$\text{rango}(A) = 2; \text{rango}(B) = 3$

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS

6 Rectas y planos en el espacio 17 Euler - Matemáticas II sm

Posiciones relativas de dos planos

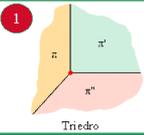
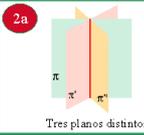
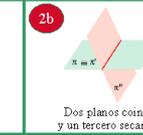
Sean $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y $\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Estudiar las posiciones relativas de ambos planos equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman sus ecuaciones. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

 <p>1</p> <p>Planos secantes Tienen una recta común</p>	 <p>2</p> <p>Planos paralelos No tienen puntos comunes</p>	 <p>3</p> <p>Planos coincidentes Son el mismo plano</p>
Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad	Sistema incompatible	Sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad
$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2$	$\text{rango}(A) = 1; \text{rango}(B) = 2$	$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 1$
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$ ó $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$

6 Rectas y planos en el espacio 18 Euler - Matemáticas II sm

Posiciones relativas de tres planos (I)

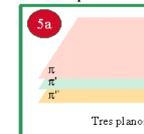
Sean $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y $\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ y $\pi'': a''x + b''y + c''z + d'' = 0$. Estudiar las posiciones relativas de tres planos equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman sus ecuaciones. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

 <p>1</p> <p>Triedro</p>	 <p>2a</p> <p>Tres planos distintos</p>	 <p>2b</p> <p>Dos planos coincidentes y un tercero secante a ellos</p>
Los tres planos tienen un punto en común	Los tres planos tienen una recta en común	Los tres planos tienen una recta en común
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad	Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad
$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 3$	$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2$	$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2$

6 Rectas y planos en el espacio 20 Euler - Matemáticas II sm

Posiciones relativas de tres planos (III)

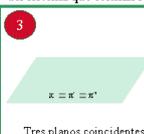
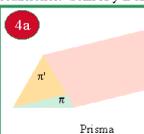
Sean $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y $\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ y $\pi'': a''x + b''y + c''z + d'' = 0$. Estudiar las posiciones relativas de tres planos equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman sus ecuaciones. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

 <p>3a</p> <p>Tres planos paralelos</p>	 <p>3b</p> <p>Dos planos coincidentes y un tercero paralelo a ellos</p>
Los tres planos no tienen puntos en común	Los tres planos no tienen puntos en común
Sistema incompatible	Sistema incompatible
$\text{rango}(A) = 1; \text{rango}(B) = 2$	$\text{rango}(A) = 1; \text{rango}(B) = 2$

6 Rectas y planos en el espacio 19 Euler - Matemáticas II sm

Posiciones relativas de tres planos (II)

Sean $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y $\pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0$ y $\pi'': a''x + b''y + c''z + d'' = 0$. Estudiar las posiciones relativas de tres planos equivale a estudiar el número de soluciones del sistema que forman sus ecuaciones. Sean A y B las matrices asociadas a dicho sistema.

 <p>3</p> <p>Tres planos coincidentes</p>	 <p>4a</p> <p>Prisma</p>	 <p>4b</p> <p>Dos planos paralelos y un tercero secante a ellos</p>
Los tres planos tienen infinitos puntos en común	Los tres planos no tienen puntos en común	Los tres planos no tienen puntos en común
Sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad	Sistema incompatible	Sistema incompatible
$\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 1$	$\text{rango}(A) = 2; \text{rango}(B) = 3$	$\text{rango}(A) = 2; \text{rango}(B) = 3$